# Teorema central del límite para integrales múltiples con respecto al proceso empírico

Hélène Boistard

Trabajo conjunto con Eustasio del Barrio

Laboratoire MODAL'X, Université Paris 10, Francia
Departamento E.I.O., Universidad de Valladolid

SEIO 2007 - Valladolid

# Integrales múltiples con respecto al proceso empírico

**Integrales múltiples** (Cf. Major (2006, 2007).)

$$J_{n,m}(h) = \int' h(x_1, \ldots, x_m)\, d\mathbb{G}_n(x_1) \cdots d\mathbb{G}_n(x_m),$$

con

- $h(x_1, ..., x_m)$ una función real simétrica en $\mathcal{X}^m$,
- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. en $(X, \mathcal{X})$ con distribución $P$,
- $\int'$ la integral fuera de las diagonales $x_r = x_s$, $1 \leq r < s \leq m$,
- $\mathbb{G}_n = \sqrt{n}(\mathbb{P}_n - P)$ el proceso empírico normalizado.

## *U*-estadísticos

$$U_n(h) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} h(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}).$$

Para $h$ totalmente degenerada :

$$J_{n,m}(h) = \frac{n!}{(n-m)!n^{m/2}} U_n(h).$$

Rubin y Vitale (1980) : TCL para U-estadísticos totalmente degenerados.
Para estadísticos no degenerados : TCL obtenido con la descomposición de Hoeffding.
Problema : límite complicado (cf. Arcones y Giné (1992) o de la Peña y Giné (1999)).

# TCL existente para integrales múltiples

Resultado de Major (2006, 2007) :

$$J_{n,m}(h) = \sum_{j=0}^{m} K_{n,j,m} J_{n,j}(\pi_j h),$$

con coeficientes $K_{n,j,m} \to K_{j,m}$, $n \to \infty$ y $\pi_j h$ la proyección de Hoeffding de $h$, definida por :

$$\pi_j h(x_1, \ldots, x_j) = \begin{cases} (\delta_{x_1} - P) \times \cdots \times (\delta_{x_j} - P) \times P^{m-j} h & \text{para} \quad j = 1, \ldots, m \\ P^m h & \text{para } j = 0. \end{cases}$$

Consecuencia : convergencia débil de $J_{n,m}(h)$ hacia

$$\sum_{j=0}^{m} K_{j,m} I_j(\pi_j h),$$

con $I_j$ la integral múltiple de Wiener de orden $j$.

# Integrales múltiples con respecto al puente Browniano

## Intuición

Para $m = 2$ :

$$\int'_{[0,1]^2} h(x_1, x_2) d\mathbb{G}_n(x_1) d\mathbb{G}_n(x_2) \xrightarrow[w]{} \int_{[0,1]^2} h(x_1, x_2) dB(x_1) dB(x_2),$$

con $\{B(x)\}_{x\in(0,1)}$ un puente Browniano. Usando :
$B(x) = W(x) - xW(1)$ con $\{W(x), x \in (0,1)\}$ un movimiento Browniano :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^m} h(x_1, x_2) dB(x_1) dB(x_2) &= \int_{[0,1]^2} h(x_1, x_2) dW(x_1) dW(x_2) \\ &\quad -2 \int_{[0,1]} \left( \int h(x_1, t) dt \right) dW(x_1) W(1) \\ &\quad + \left( \int h(s,t) ds dt \right) W(1)^2 \end{aligned}$$

# Definición

$$\rho_j h(x_1, \ldots, x_j) = \delta_{x_1} \times \cdots \times \delta_{x_j} \times P^{m-j} h$$

## Definición

*Para $h \in L^2(P^m)$ función simétrica,*

$$J_m(h) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{m-j} I_j(\rho_j h)(I_1(1))^{m-j}.$$

## Proposición

*Para $h \in L^2(P^m)$ simétrica,*

$$J_m(h) = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!} H_{m-j}(0) I_j(\pi_j h),$$

*donde $H_{m-j}$ es el polinomio de Hermite de grado $m-j$.*

## TCL para la integral múltiple

**Teorema**

*$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra i.i.d. con distribución $P$ sin átomos $P$ y $h_1, \ldots, h_k$ funciones de cuadrado integrable en $m_1, \ldots, m_k$ variables. Entonces*

$$(J_{n,m_1}(h_1), \ldots, J_{n,m_k}(h_k)) \xrightarrow{w} (J_{m_1}(h_1), \ldots, J_{m_k}(h_k)) \,.$$

# Bootstrap para integrales dobles

## Bootstrap de $U$-estadísticos

- Bickel y Freedman (1981) : bootstrap *naïve* de $U$-estadísticos para núcleos no degenerados de orden 2. Núcleo $L_2$ en la diagonal.
- Bretagnolle (1983) : bootstrap *naïve* para núcleos totalmente degenerados. Convergencia en probabilidad y casi segura, bajo condiciones de integrabilidad y para tamaños bootstrap $N$ tales que $N/n \to 0$. Ejemplo en el que $N = n$ y el bootstrap no funciona.
- Arcones y Giné (1992), Dehling y Mikosch (1994) : estadístico bootstrap distinto. Proyección de Hoeffding del núcleo con respecto a la distribución empírica $\mathbb{P}_n$.

## Bootstrap naïve de integrales dobles

$(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ muestra i.i.d. bootstrap con distribución subyacente $\mathbb{P}_n$.
Distribución empírica : $\mathbb{P}_n^*$.
Integral doble bootstrap :

$$J_{n,2}^*(h) = \int' h(x,y) d\mathbb{G}_n^*(x) d\mathbb{G}_n^*(y),$$

con $\mathbb{G}_n^* = \sqrt{n}(\mathbb{P}_n^* - \mathbb{P}_n)$ el proceso empírico bootstrap.

**Teorema**

*$h \in L_2(P^2)$, $P$ sin átomos. Entonces :*

$$d_{LB}\left(\mathcal{L}^*\left(J_{n,2}^*(h)\right), \mathcal{L}\left(J_2(h)\right)\right) \to 0 \text{ c.s. cuando } n \to \infty$$