

TP2 : simulation de processus AR, MA et ARMA

Le but de ce TP est d'apprendre à simuler des séries temporelles de type *MA*, *AR* et *ARMA*, de visualiser leur chronogramme et leurs fonctions d'autocorrélation et autocorrélation partielle.

La plupart des exemples de processus à simuler sont tirés de l'ouvrage : *Time series: theory and methods* de P.J. Brockwell et R.A. Davis (Springer Verlag, 1991). Les résultats théoriques concernant les calculs d'autocorrélations proviennent du chapitre 3 de ce livre.

Pour la simulation des processus, il sera utile de s'inspirer des codes en exemple dans le cours 4.

A savoir : la fonction "puissance" s'obtient dans SAS grâce à ** : pour écrire k^2 , il faut taper : $k * *2$.

1 Processus *MA*

On va simuler le processus Y_t satisfaisant l'équation suivante de type *MA*(1) :

$$Y_t = Z_t - 0.8Z_{t-1},$$

où Z_t est un bruit blanc gaussien centré réduit.

1. Calculer les fonctions d'autocovariance γ et d'autocorrélation ρ de la série Y_t .
2. Simuler 200 observations de la série en générant une variable `date` que vous choisirez. Tracer le chronogramme
3. Avec une proc `arima`, et la sortie `outcov`, calculer les diverses fonctions d'autocorrélation jusqu'au décalage 50.
4. Tracer la fonction d'autocorrélation empirique et la comparer avec la fonction d'autocorrélation théorique.
5. La fonction d'autocorrélation partielle, qu'on notera α , est donnée par la formule suivante :

$$\alpha(k) = -\frac{0.8^k(1 - 0.8^2)}{1 - 0.8^{2(k+1)}}.$$

Créer un vecteur contenant $\alpha(0), \dots, \alpha(50)$ et représenter sur un même graphe la fonction d'autocorrélation partielle théorique et empirique.

2 Processus *AR*

On va simuler le processus Y_t satisfaisant l'équation suivante de type *AR*(1) :

$$Y_t - 0.9Y_{t-1} = Z_t,$$

où Z_t est un bruit blanc gaussien centré réduit.

1. Simuler 200 observations de la série et tracer le chronogramme.

2. Donner la fonction d'autocorrélation théorique (voir le cours), la calculer jusqu'au décalage 50. Calculer la FAC empirique grâce à la sortie `outcov` de la proc `arima`. Tracer ces deux fonctions sur un graphique.
3. Tracer la fonction d'autocorrélation partielle empirique et comparer avec la théorique.
4. Tracer les diagrammes retardés de Y_t en fonction de Y_{t-1} puis de Y_{t-2} . Commenter.

3 Processus *ARMA*

On va simuler le processus Y_t satisfaisant l'équation suivante de type *ARMA*(2, 1) :

$$Y_t - Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} = Z_t + Z_{t-1},$$

où Z_t est un bruit blanc gaussien centré réduit.

1. Simuler 200 observations de la série Y_t et tracer son chronogramme.
2. On donne la fonction d'autocovariance γ de la série :

$$\gamma(k) = \sigma_Z^2 2^{-k} \left(\frac{32}{3} + 8k \right).$$

Calculer l'autocorrélation théorique jusqu'à l'ordre 50, puis tracer sur un même graphique l'autocorrélation théorique et l'autocorrélation empirique.